

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI

Bài 1. (4 điểm)

Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a) $\cos 2x - 2\sin 2x = 11\sin x + 2\cos x + 6$

b)
$$\begin{cases} x + y = \sqrt{4z - 1} \\ y + z = \sqrt{4x - 1} \\ z + x = \sqrt{4y - 1} \end{cases}$$

Bài 2. (4 điểm)

Tính các giới hạn sau:

a)
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{n}{(n-2)! + (n-1)! + n!} \right] \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-2x} - 2\sqrt{x-1} + 2x-3}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{6x-3} - 2x}$$

Bài 3. (2 điểm)

Giả sử $(2x+3)^5(x^2-2)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20} + a_{21}x^{21}$. Tính a_{17} .

Bài 4. (2 điểm)

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện: $f(30) = 4$ và $f(f(x)) \cdot f(x) = 79000, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(1975)$.

Bài 5. (4 điểm)

Cho tứ diện $ABCD$ có CD vuông góc với mặt ABC . Gọi M, N lần lượt là các trung điểm các cạnh AB, BD và K là điểm trên cạnh CD sao cho $CK = \frac{1}{3}CD$.

Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng BK và CM bằng với khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và CM .

Bài 6. (4 điểm)

Một số khối lập phương đơn vị được tập hợp lại thành một khối lập phương lớn hơn. Sau đó, một số mặt nhưng không phải tất cả các mặt của khối lập phương lớn được sơn. Sau khi sơn đã khô, khối lập phương lớn được tháo rời và người ta phát hiện 218 khối đơn vị có dính sơn trên chúng. Hỏi kích thước của khối lập phương lớn là bao nhiêu?

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (4 điểm)

a) $\cos 2x - 2\sin 2x = 11\sin x + 2\cos x + 6$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x - \cos 2x + 11\sin x + 2\cos x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x \cos x + 2\sin^2 x + 11\sin x + 2\cos x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x + 1) + (2\sin x + 1)(\sin x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(2\cos x + \sin x + 5) = 0 \quad (1đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ 2\cos x + \sin x = -5 \text{ (VN)} \end{cases} \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (0,5đ)$$

b) $\begin{cases} x + y = \sqrt{4z - 1} \\ y + z = \sqrt{4x - 1} \\ z + x = \sqrt{4y - 1} \end{cases} \quad (I) \quad \text{Điều kiện: } x, y, z \geq \frac{1}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{4z - 1} = \sqrt{(4z - 1) \cdot 1} \leq \frac{4z - 1 + 1}{2} = 2z. \text{ Tương tự } \sqrt{4x - 1} \leq 2x, \sqrt{4y - 1} \leq 2y \quad (0,5đ)$$

$$\text{Suy ra: } 2(x + y + z) = \sqrt{4z - 1} + \sqrt{4x - 1} + \sqrt{4y - 1} \leq 2(x + y + z) \quad (*) \quad (0,5đ)$$

$$\text{Từ (*) suy ra: } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4z - 1 = 1 \\ 4x - 1 = 1 \\ 4y - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (1đ)$$

Bài 2. (4 điểm)

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \dots + \frac{n}{(n-2)! + (n-1)! + n!} \right] \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$

$$\frac{n}{(n-2)! + (n-1)! + n!} = \frac{1}{(n-2)! \cdot n} = \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \quad (1đ)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=3}^n \frac{k}{(k-2)! + (k-1)! + k!} = \sum_{k=3}^n \left[\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right] = \frac{1}{2!} - \frac{1}{n!} \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=3}^n \frac{k}{(k-2)! + (k-1)! + k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{n!} \right) = \frac{1}{2} \quad (0,5đ)$$

$$\begin{aligned}
b) \quad M &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-2x} - 2\sqrt{x-1} + 2x-3}{\sqrt{2x-3} + \sqrt{6x-3} - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-2x} - (3-x) - 2\sqrt{x-1} + x}{\sqrt{2x-3} - (x-1) + \sqrt{6x-3} - (x+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\sqrt{5-2x} - (3-x)}{(x-2)^2} + \frac{x-2\sqrt{x-1}}{(x-2)^2}}{\frac{\sqrt{2x-3} - (x-1)}{(x-2)^2} + \frac{\sqrt{6x-3} - (x+1)}{(x-2)^2}} \quad (0,5đ)
\end{aligned}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-2x} - (3-x)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{\sqrt{5-2x} + 3-x} = -\frac{1}{2} \quad (0,25đ)$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2\sqrt{x-1}}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{4} \quad (0,25đ)$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3} - (x-1)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{\sqrt{2x-3} + x-1} = -\frac{1}{2} \quad (0,25đ)$$

$$D = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6x-3} - (x+1)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{\sqrt{6x-3} + x+1} = -\frac{1}{6} \quad (0,25đ)$$

$$\Rightarrow M = \frac{A+B}{C+D} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = \frac{3}{8} \quad (0,5đ)$$

Bài 3. (2 điểm)

Giả sử $(2x+3)^5(x^2-2)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20} + a_{21}x^{21}$. Tính a_{17} .

$$(2x+3)^5 = \sum_{i=0}^5 C_5^i (2x)^{5-i} \cdot 3^i = \sum_{i=0}^5 C_5^i x^{5-i} \cdot 2^{5-i} \cdot 3^i \quad (0,25đ)$$

$$(x^2-2)^8 = \sum_{i=0}^8 C_8^i (x^2)^{8-i} (-2)^i = \sum_{i=0}^8 C_8^i x^{16-2i} (-2)^i \quad (0,25đ)$$

Số hạng chứa x^{17} là:

$$C_8^0 x^{16} (-2)^0 \cdot C_5^4 x \cdot 2 \cdot 3^4 + C_8^1 x^{14} (-2)^1 \cdot C_5^2 x^3 \cdot 2^3 \cdot 3^2 + C_8^2 x^{12} (-2)^2 \cdot C_5^0 x^5 \cdot 2^5 \cdot 3^0 \quad (0,5đ)$$

Hệ số của x^{17} là:

$$C_8^0 (-2)^0 \cdot C_5^4 \cdot 2 \cdot 3^4 + C_8^1 (-2)^1 \cdot C_5^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 + C_8^2 (-2)^2 \cdot C_5^0 \cdot 2^5 \cdot 3^0 = 810 - 11520 + 3584 = -7126 \quad (1đ)$$

Bài 4. (2 điểm)

Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên R thỏa mãn các điều kiện: $f(30) = 4$ và $f(f(x)) \cdot f(x) = 79000, \forall x \in R$. Tính $f(1975)$.

Giải

$$\text{Cho } x = 30 \text{ ta được } f(f(30)) \cdot f(30) = 79000 \Rightarrow f(4) \cdot 4 = 79000 \Rightarrow f(4) = 19750 \quad (0,5đ)$$

Do $f(x)$ là hàm liên tục trên R và 1975 thuộc khoảng $(4, 19750)$ nên tồn tại số x_0 thuộc khoảng $(4, 30)$ sao cho $f(x_0) = 1975$. (1đ)

$$\text{Cho } x = x_0 \text{ ta được } f(f(x_0)) \cdot f(x_0) = 79000 \Rightarrow f(1975) \cdot 1975 = 79000$$

$$\Rightarrow f(1975) = 40 \quad (0,5đ)$$

Bài 5. (4 điểm)

Cho tứ diện $ABCD$ có CD vuông góc với mặt ABC . Gọi M, N lần lượt là các trung điểm các cạnh AB, BD và K là điểm trên cạnh CD sao cho $CK = \frac{1}{3}CD$. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng BK và CM bằng với khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và CM .

Giải

Gọi P là trung điểm của AD và I, J lần lượt là các điểm đối xứng của A, B qua C . (0,5đ)

K là trọng tâm $\triangle IAD \Rightarrow I, K, P$ thẳng hàng. (0,5đ)

K là trọng tâm $\triangle JBD \Rightarrow J, K, N$ thẳng hàng. (0,5đ)

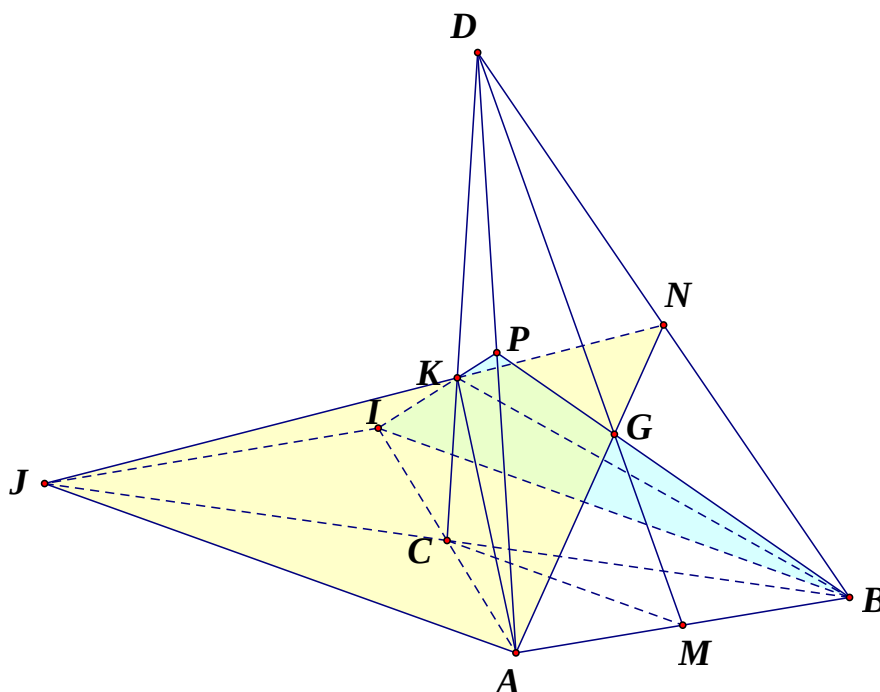
$ABIJ$ là hình bình hành $\Rightarrow CM \parallel AJ \parallel BI$ (0,5đ)

$\Rightarrow CM \parallel (IBP)$ và $CM \parallel (JAN)$ (0,5đ)

$\Rightarrow d(CM, BK) = d(CM, (IBP)) = d(C, (IBP))$ (0,5đ)

Cmtt $d(CM, AN) = d(C, (JAN))$ (0,25đ)

$KC \perp (ABC)$ và $\triangle BCI = \triangle JCA \Rightarrow d(C, (IBP)) = d(C, (JAN)) \Rightarrow đpcm$. (0,75đ)



Cách khác:

Gọi (α) là mp qua M và vuông góc với CM và A_1, B_1, D_1, K_1, N_1 lần lượt là hình chiếu của A, B, D, K, N lên (α) .

Ta có: MD_1 là trung trực của $\triangle A_1B_1D_1$,

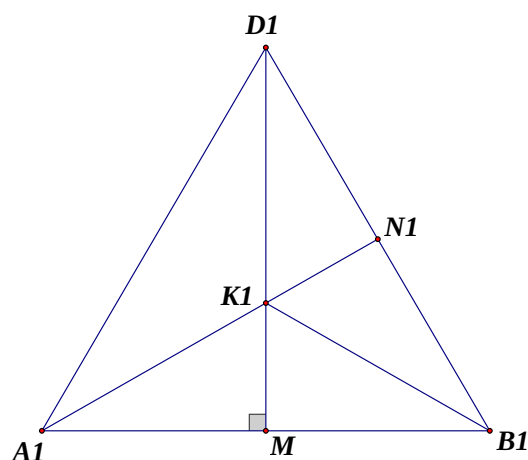
K_1 là trọng tâm $\triangle A_1B_1D_1$

$\Rightarrow A_1, K_1, N_1$ thẳng hàng

$\triangle K_1A_1B_1$ cân tại K_1

$\Rightarrow d(M, A_1N_1) = d(M, B_1K_1)$

$\Rightarrow d(CM, AN) = d(CM, BK)$



Bài 6. (4 điểm)

Một số khối lập phương đơn vị được tập hợp lại thành một khối lập phương lớn hơn. Sau đó, một số mặt nhưng không phải tất cả các mặt của khối lập phương lớn được sơn. Sau khi sơn đã khô, khối lập phương lớn được tháo rời và người ta phát hiện 218 khối đơn vị có dính sơn trên chúng. Hỏi kích thước của khối lập phương lớn là bao nhiêu?

Giải

Giả sử khối lập phương lớn có kích thước $n \times n \times n$.

Ta tính số khối đơn vị được sơn trong các trường hợp sau:

- 1 mặt được sơn: n^2 (0,25đ)
- 2 mặt đối diện được sơn: $2n^2$ (0,25đ)
- 2 mặt kề nhau được sơn: $2n^2 - n$ (0,5đ)
- 3 mặt liên tiếp được sơn: $3n^2 - 2n$ (0,5đ)
- 3 mặt có đỉnh chung được sơn: $3n^2 - 3n + 1$ (0,5đ)
- 4 mặt có chứa 2 cặp mặt đối diện được sơn: $4n^2 - 4n$ (0,5đ)
- 4 mặt có chứa 1 cặp mặt đối diện được sơn: $4n^2 - 5n + 2$ (0,5đ)
- 5 mặt được sơn: $5n^2 - 8n + 4$ (0,5đ)

Do $218 = 2.109$ có dạng $3k + 2$, $4k + 2$ nên $4n^2 - 5n + 2 = 218$ hay $n = 8$

Có thể giải trực tiếp để tìm n .